CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES
MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

L'espace affine euclidien orienté E, de dimension 3, associé à l'espace vectoriel $\vec{E}$, est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'axes Ox, Oy, Oz. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $(\vec{u} \mid \vec{v})$ et leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

On considère dans E l'hélice circulaire (H) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht \end{cases} \quad \text{où R et h sont deux constantes } > 0.$$

L'objet de ce problème est d'étudier les projections orthogonales et côniques planes de (H).

La partie III est indépendante des deux premières parties.

PARTIE I : Formules de projection orthogonale.

1) Soit $\vec{n}$ un vecteur de norme égale à 1, de coordonnées (a, b, c) avec $c \geq 0$ et soit (P) le plan affine passant par O et orthogonal à $\vec{n}$.
Soit p la projection affine orthogonale de E sur le plan (P), et (C) la courbe plane image de (H) par p. Quelle est la nature de la courbe (C) lorsque (P) est le plan xOy ?

2) On suppose dorénavant que (P) est différent du plan xOy. Comment se traduit cette condition sur les nombres a, b, c ?

3) Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer les coordonnées (x', y', z') de p(M) dans le même repère.

4) Soit K le point tel que $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$, et K' son image dans la projection p (K' = p(K)).

a) On définit $\vec{I} = \dfrac{\overrightarrow{OK'}}{\left\| \overrightarrow{OK'} \right\|}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{I}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

b) On définit le vecteur $\vec{J}$ par $\vec{J} = \vec{I} \wedge \vec{n}$. Calculer les coordonnées de $\vec{J}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Que peut-on dire de la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$?

5) On pose $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et on définit la matrice P par : $P = \begin{pmatrix} -\lambda ac & -\lambda b & a \\ -\lambda bc & \lambda a & b \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & c \end{pmatrix}$

Montrer que P est la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{n})$ de $\vec{E}$.

6) Le point M de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se projette par p en N de coordonnées (X, Y) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de (P).
Déduire de **5**) les formules exprimant X, Y en fonction de x, y et z.

PARTIE II : Étude des projections orthogonales de l'hélice.

1) Soit θ_0 le réel défini modulo 2π par $\cos\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Quel angle géométrique θ_0 mesure-t-il ?

2) Montrer que des équations paramétriques de la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ sont données par les formules $\begin{cases} X = dht - cR\cos(t-\theta_0) \\ Y = R\sin(t-\theta_0) \end{cases}$ où l'on a posé $d = \sqrt{a^2+b^2}$.

3) Quelle est la nature de (C) lorsque le plan (P) contient l'axe Oz ?

4) Montrer que si l'on fixe le réel c, les diverses courbes (C) sont translatées les unes des autres à l'intérieur du plan (P), rapporté au repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.
On ne restreint donc pas la généralité en supposant que dorénavant $\theta_0 = 0$ (donc b = 0 et d = a > 0).

5) a) Montrer que la courbe (C) possède des points singuliers (ou "stationnaires") si et seulement si ah = cR.

b) Montrer que cette dernière condition est équivalente au fait que le vecteur $\vec{n}$ soit parallèle à l'une des tangentes à l'hélice (H).
Jusqu'à la fin de la **question 5)**, on supposera que ah = cR.

c) Calculer a et c en fonction de h et R.

d) Étudier la courbe (C) (Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi/2, \pi/2]$, et étudier les variations).

e) Tracer la courbe (C) pour R = 3 et h = 4 dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2+4\pi$).

6) Étudier et tracer la courbe (C) pour $a = c = 1/\sqrt{2}$, $h = 2\sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2+4\pi$).

7) Étudier et tracer la courbe (C) pour $a = c = 1/\sqrt{2}$, $h = \sqrt{2}$, $R = 2\sqrt{2}$ (t variant de $-\pi/2$ à $-\pi/2+4\pi$).

PARTIE III : Étude des projections coniques de l'hélice.

1) Soit S un point du plan xOy de coordonnées (u, v, 0). A tout point M de E de coordonnées (x, y, z) avec $z \neq 0$, on fait correspondre le point d'intersection N de la droite (SM) avec le plan (P') d'équation $z = d$ où d est un réel > 0.

Calculer dans $(O', \vec{I}, \vec{J})$ où O' est projeté orthogonal de O sur (P'), les coordonnées (X, Y) du point N, en fonction de x, y, z (on pourra utiliser des équations paramétriques de la droite (SM)).

2) En déduire des équations paramétriques dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ de la courbe (C') décrite par le point N quand M décrit l'hélice (H), excepté le point d'ordonnée 0. On posera $k = \frac{dR}{h}$.

3) a) Montrer que lorsque S est en O l'équation polaire de (C') dans $(O', \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\rho = \frac{k}{\theta}.$$

b) Étudier cette courbe (réduction de l'intervalle d'étude, variations et branches infinies) et en donner un tracé pour θ variant de $\frac{\pi}{4}$ à 5π).

4) a) Montrer que lorsque u = - R et v = 0 l'équation polaire de (C') dans $(O'', \vec{i}, \vec{j})$ où O'' a pour coordonnées (R, 0, d) est : $\rho = k\frac{\cos\theta}{\theta}$.

b) Étudier cette courbe et en donner un tracé dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ pour θ variant de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{2}$).

5) Lorsque u = R et v = 0, déterminer un repère dans lequel l'équation polaire de (C') soit :

$$\rho = k\frac{\sin\theta}{\theta}$$